حل معادلة المقدار الثلاثي

الكاتب: عمر عبد السلام أبوستة.

المقدار الثلاثي هو مصطلح يُطلق على المعادلة التي على الصيغة التالية:

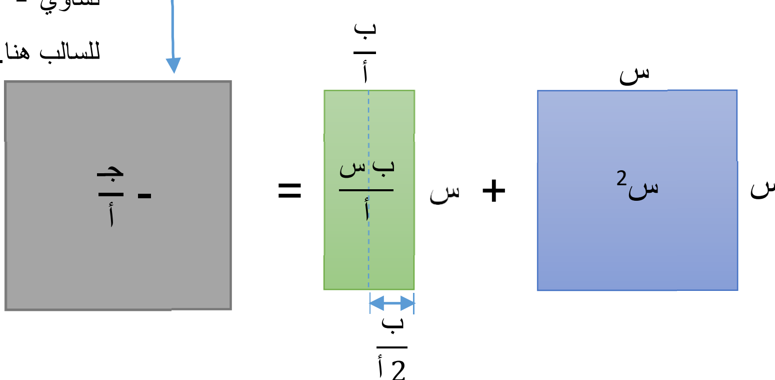
$$\text{أ}\,\text{س}^2 + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = 0$$

وهي معادلة تظهر في كثير من التطبيقات الفيزيائية وغيرها، ويُحتاج فيها إيجاد قيمة س؛
ولفعل ذلك، نقسم المعادلة على الـ أ، ونطرح $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ من طرفيها:

$$\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\,\text{س} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$$

وذلك لإمكانية تمثيلها بيانيا كالتالي:

لا تهم أبعاد هذا الشكل؛ كل ما يهم هو أنّ مساحته تساوي $-\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ ، ولا داعي لإيجاد معنى بياني للسالب هنا.



فإذا قسّمنا الحد الثاني إلى نصفين كما بالشكل، وركّبنا كل منهما على الحد الأول كالتالي:

ب²/4أ² | ب/2أ | س² | س | ب/2أ | س | + | ب²/4أ² | = | - جـ/أ | + | ب²/4أ²

نحصل على مربع ناقص، ينقصه مربع صغير مساحته $\frac{ب^2}{4أ^2}$، فإذا أكملنا المربع[1] بإضافة تلك المساحة إلى طرفي المعادلة، يُكتب ذلك جبريا كالتالي:

$$س^2 + \frac{ب}{أ}س + \frac{ب^2}{4أ^2} = -\frac{جـ}{أ} + \frac{ب^2}{4أ^2}$$

فإنّ الطرف الأيمن من هذه المعادلة يساوي مساحة المربع الكبير، الذي طول ضلعه $(س + \frac{ب}{2أ})$.

فبالتعويض عن الطرف الأيمن بمساحته كالتالي:

$$\left(س + \frac{ب}{2أ}\right)^2 = -\frac{جـ}{أ} + \frac{ب^2}{4أ^2}$$

الآن يمكن الحل لـ س، بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة، طرح منهما $\frac{ب}{2أ}$:

$$س = -\frac{ب}{2أ} \pm \sqrt{\frac{ب^2}{4أ^2} - \frac{جـ}{أ}}$$

عند تربيع $\sqrt{\frac{ب^2}{4أ^2} - \frac{جـ}{أ}}$ نحصل على $\frac{ب^2}{4أ^2} - \frac{جـ}{أ}$، وكذلك عند تربيع $-\sqrt{\frac{ب^2}{4أ^2} - \frac{جـ}{أ}}$ نحصل على $\frac{ب^2}{4أ^2} - \frac{جـ}{أ}$، فكلاهما حل لأخذ الجذر التربيعي لهذا المقدار. فيوجد قيمتين لـ س، تحققان هذه المعادلة، واختصرناهما بالعلامة ±.

وبضرب الجذر في $\frac{2أ}{2أ}$، فإنّ 2 أ تدخل تحت الجذر بتربيعها، أي تصبح 4 $أ^2$، فتصبح المعادلة:

$$س = -\frac{ب}{2أ} \pm \frac{\sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$$

ثم بجمع الكسرين؛ نحصل على حل المقدار الثلاثي، وهو قيمتان للـ س:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4أجـ}}{2أ}$$

1- لذلك تسمى طريقة الحل هذه، طريقة "إكمال المربع".